1 ［旧黄チャート数学Ⅰ　例題135］改

右の表は，ある製品を成型できる２台の工作機械Ｘ，Ｙの１時間あたりのそれぞれの不良品の数 x，y を５時間にわたって調べたものである。(単位は個)

x	5	4	8	12	6
y	6	9	8	5	7

(1)　x，y のデータの平均値，分散，標準偏差，相関係数をそれぞれ求めよ。

(2)　回帰直線の方程式を求めよ。

解答　(1)　x，y のデータの平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ として作表します。下2行は合計･平均です。

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	x^2	y^2	xy
5	6	−2	−1	2	4	1	25	36	30
4	9	−3	2	−6	9	4	16	81	36
8	8	1	1	1	1	1	64	64	64
12	5	5	−2	−10	25	4	144	25	60
6	7	−1	0	0	1	0	36	49	42
35	35	0	0	−13	40	10	285	255	232
7	7	0	0	−2.6	8	2	57	51	46.4

平均　$\overline{x}=\dfrac{1}{5}\boxed{35}=\boxed{7}$，　$\overline{y}=\dfrac{1}{5}\boxed{35}=\boxed{7}$

分散　$s_x{}^2=\dfrac{1}{5}\boxed{40}=\boxed{8}$，　$s_y{}^2=\dfrac{1}{5}\cdot\boxed{10}=\boxed{2}$　共分散　$S_{xy}=\dfrac{1}{5}\boxed{(-13)}=\boxed{-2.6}$

標準偏差 $s_x=\sqrt{\boxed{8}}\fallingdotseq\boxed{2.8}$，　$s_y=\sqrt{\boxed{2}}\fallingdotseq\boxed{1.4}$　相関係数 $r=\dfrac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\boxed{\dfrac{-2.6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}}=\boxed{-0.65}$

別解　分散は「偏差の2乗の平均」，共分散は「偏差の積の平均」ですが、式の変形によって。
分散は「2乗の平均－平均の2乗」，共分散は「積の平均－平均の積」とすることもできます。

$$S_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-(\overline{x})^2 \qquad S_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-(\overline{y})^2 \qquad S_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n}-\overline{x}\cdot\overline{y}$$

分散　$s_x{}^2=\dfrac{1}{5}\cdot\boxed{285}-\boxed{7}^2=\boxed{8}$，　$s_y{}^2=\dfrac{1}{5}\cdot\boxed{255}-\boxed{7}^2=\boxed{2}$

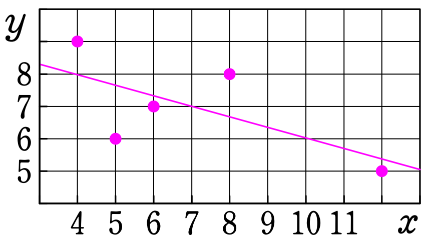
共分散　$S_{xy}=\dfrac{1}{5}\cdot\boxed{232}-\boxed{7\cdot7}=\boxed{-2.6}$　　相関係数　$r=\dfrac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\boxed{\dfrac{-2.6}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}}}=\boxed{-0.65}$

解答　(2)　回帰直線の方程式は　$y-\overline{y}=\dfrac{s_y}{s_x}\cdot r\,(x-\overline{x})$　の定義より

$$y-\boxed{7}=\frac{\boxed{\sqrt{2}}}{\boxed{\sqrt{8}}}\cdot\boxed{(-0.65)}\left(x-\boxed{7}\right)$$

$$y=\boxed{-0.325}\,x+\boxed{9.275}$$

$\dfrac{s_y}{s_x}\cdot r=\dfrac{s_y}{s_x}\cdot\dfrac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\dfrac{s_{xy}}{s_x^{\,2}}$
を使う場合もあります。



2

5組の x，y のデータについて 平均値，分散，標準偏差，共分散，相関係数 および回帰直線の方程式を求めよ。

解答

x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	x^2	y^2	xy
3	2	−1	−1	1	1	1	9	4	6
7	4	3	1	3	9	1	49	16	28
6	5	2	2	4	4	4	36	25	30
1	3	−3	0	0	9	0	1	9	3
3	1	−1	−2	2	1	4	9	1	3
20	15	0	0	10	24	10	104	55	70
4	3	0	0	2	4.8	2	20.8	11	14

平均　$\overline{x}=\frac{1}{5}\boxed{20}=\boxed{4}$，　$\overline{y}=\frac{1}{5}\boxed{15}=\boxed{3}$

分散　$s_x{}^2=\frac{1}{5}\boxed{24}=\boxed{4.8}$，　$s_y{}^2=\frac{1}{5}\cdot\boxed{10}=\boxed{2}$，　共分散　$S_{xy}=\frac{1}{5}\boxed{10}=\boxed{2}$

標準偏差 $s_x=\sqrt{\boxed{4.8}}\fallingdotseq\boxed{2.2}$，$s_y=\sqrt{\boxed{2}}\fallingdotseq\boxed{1.4}$，相関係数 $r=\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{4.8}\cdot\sqrt{2}}}=\boxed{0.6455}$

別解　分散は「偏差の2乗の平均」，共分散は「偏差の積の平均」ですが、式の変形によって。分散は「2乗の平均−平均の2乗」，共分散は「積の平均−平均の積」とすることもできます。

$$S_x^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n}-(\overline{x})^2 \qquad S_y^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}{n}-(\overline{y})^2 \qquad S_{xy}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i}{n}-\overline{x}\cdot\overline{y}$$

分散　$s_x{}^2=\frac{1}{5}\cdot\boxed{104}-\boxed{4}^2=\boxed{4.8}$，　$s_y{}^2=\frac{1}{5}\cdot\boxed{55}-\boxed{3}^2=\boxed{2}$

共分散　$S_{xy}=\frac{1}{5}\cdot\boxed{70}-\boxed{4\cdot 3}=\boxed{2}$　　相関係数　$r=\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{4.8}\cdot\sqrt{2}}}\fallingdotseq\boxed{0.6455}$

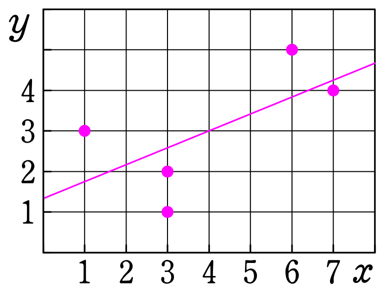
解答　(2)　回帰直線の方程式は　$y-\overline{y}=\frac{s_y}{s_x}\cdot r\,(x-\overline{x})$　の定義より

$$y-\boxed{3}=\frac{\boxed{\sqrt{2}}}{\boxed{\sqrt{4.8}}}\cdot\boxed{0.6455}\left(x-\boxed{4}\right)$$

$$y=\boxed{0.4167}\,x+\boxed{1.333}$$

$\frac{s_y}{s_x}\cdot r=\frac{s_y}{s_x}\cdot\frac{s_{xy}}{s_x\cdot s_y}=\frac{s_{xy}}{s_x^2}$

を使う場合もあります。



3 現［赤チャート数学Ⅰ 練習120］　解答 解説 ともに表示しています。

2つの変量 x, y のデータが，5個の x, y の値の組として，右のように与えられているとき，回帰直線を求め，$y=ax+b$ の形で表せ。

	1	2	3	4	5
x	12	14	11	8	10
y	11	12	14	10	8

解答　$y=0.45x+6.05$

解説　x，y の平均値をそれぞれ $\overline{x}$，$\overline{y}$ とすると

$$\overline{x}=\frac{1}{5}(12+14+11+8+10)=11,\qquad \overline{y}=\frac{1}{5}(11+12+14+10+8)=11$$

したがって，次の表が得られる。

番号	x	y	$x-\overline{x}$	$y-\overline{y}$	$(x-\overline{x})^2$	$(y-\overline{y})^2$	$(x-\overline{x})(y-\overline{y})$
1	12	11	1	0	1	0	0
2	14	12	3	1	9	1	3
3	11	14	0	3	0	9	0
4	8	10	−3	−1	9	1	3
5	10	8	−1	−3	1	9	3
計					20	20	9

よって　$s_x=s_y=\sqrt{\dfrac{20}{5}}=2,\qquad s_{xy}=\dfrac{9}{5}=1.8$

したがって，回帰直線の式は

$$y=\frac{1.8}{2^2}x+11-\frac{1.8\times 11}{2^2}\quad \text{すなわち}\quad y=0.45x+6.05$$ 答

【スタディエイドによる散布図作成】