1 【9.2.4 線形回帰 (最小二乗法)】　　　参考 小波秀雄「統計学入門」9.2.4 線形回帰 (最小二乗法)

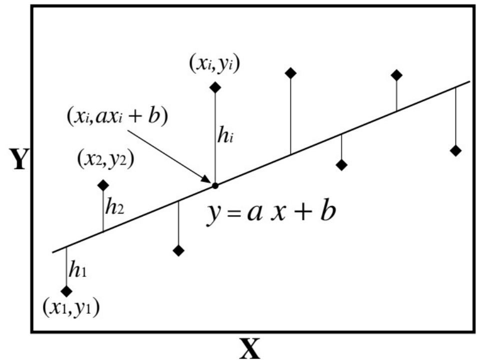

図 9.6　最小 2 乗法の原理: $h_1^2 + h_2^2 + \ldots$ が最小になるように a, b の値を決めてやる．

図9.6のように $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$が与えられていたとき， $y=ax+b$ で表される直線を引いたとしよう．この時， i 番目のデータ点と直線の縦のずれを h_i とすると，

$$h_i = y_i - (ax_i + b) \tag{9.10}$$

となる．直線 $y=ax+b$ は， a と b の値を変化させることで，傾きを変えたり平行にずらしたりできる．それでは a， b がどのような値をとったときに，直線はデータ点をもっともよく近似できるだろうか．詳しい導き方は付録 (p.167)にゆずり，ここでは結果だけを示す．

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{xy}}{\boldsymbol{\sigma}_x^2} \tag{9.11}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} \tag{9.12}$$

式 (9.11)， (9.12) で得られた a ， b を用いて直線を引くと，データの増減を「ほどよく」表した直線がえられる．このような直線を**回帰直線**と呼ぶ.

【付録 重要な関係式などの導出　A．8　最小二乗法】

付録ページに使われた数式は次の８つ．

$$h_i = y_i - (ax_i + b) \tag{A.36}$$

$$S = \frac{1}{n}(h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2) \tag{A.37}$$

$$S = \overline{y^2} + a^2\overline{x^2} - 2b\overline{y} - 2s\overline{xy} + 2ab\overline{x} + b^2 \tag{A.38}$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2a\overline{x^2} - 2\overline{xy} + 2b\overline{x} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\overline{y} + 2a\overline{x} + 2b = 0 \tag{A・39}$$

$$\overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{xy} \tag{A.40}$$

$$\overline{x}a + b = \overline{y} \tag{A.41}$$

$$a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}_{xy}}{\boldsymbol{\sigma}_x^2} \tag{A.42}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x} \tag{A.43}$$

2 【行間を埋める】

$$h_i = y_i - (ax_i + b) \tag{A.36}$$

$$S = \frac{1}{n}(h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2) \tag{A.37}$$

$$S = \frac{1}{n}\{(y_1^2 + \cdots + y_n^2) + a^2(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + nb^2 - 2a(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) + 2ab(x_1 + \cdots + x_n) - 2b(y_1 + \cdots + y_n)\}$$

$$S = \overline{y^2} + a^2\overline{x^2} - 2b\overline{y} - 2a\overline{xy} + 2ab\overline{x} + b^2 \tag{A.38}$$

(A.38) を a , b それぞれについて微分します。

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2a\overline{x^2} - 2\overline{xy} + 2b\overline{x} = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2\overline{y} + 2a\overline{x} + 2b = 0 \tag{A・39}$$

$$\overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{xy} \tag{A.40}$$

$$\overline{x}a + b = \overline{y} \tag{A.41}$$

a を求めるには加減法で b を消去する。

(A.40) … $\overline{x^2}a + \overline{x}b = \overline{xy}$

(A.41) × $\overline{x}$ … $-\quad \overline{x}^2a + \overline{x}b = \overline{x}\ \overline{y}$

$$a(\overline{x^2} - \overline{x}^2) = \overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}$$

b を求めるには (A.41) で $\overline{x}a$ を移項するだけでよい。

$$\boldsymbol{a = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\ \overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}} \tag{A.42}$$

$$\boldsymbol{b = \overline{y} - a\overline{x}} \tag{A.43}$$