不定方程式　（互除法および連分数を用いた解法）

組　　番　名前

1　$7x+5y=1$ の整数解を１つ求めよ。

解答　係数の倍数を書き出して，差が1の数を探す。

$7x$ ： 7 , 14 , 21 , 28 , 35 , 42 , 49,…

$5y$ ： 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , …

例えば$-14=7\times(-2)$, $15=5\times3$　より　$x=-2$ ， $y=3$ 答

（もちろん　$7x=21$, $5y=-20$ より　$x=3$ ， $y=-4$ なども正解である。）

別解　互除法による考え方

$7x+5y=1$　　　係数７を係数５で割って，商１，余り２ だから

$(5\times1+2)x+5y=1$

$2x+5(x+y)=1$

$2x+5y'=1$　例えば　$x=-2$ ， $y'=1$ のとき $2x+5y'=1$

$y'=x+y=-2+y=1$ より　$y=3$

よって　$(x,y)=(-2\,,\,3)$ 答

別解　$\dfrac{7}{5}=1+\dfrac{2}{5}=1+\dfrac{1}{\frac{5}{2}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2}}$

一番最後の $\dfrac{1}{2}$ を除いた分数は　$1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

分母の２から $x=-2$ ，分子の３から$y=3$ を取り

$x=-2$ ， $y=3$ 答

2　$33x+7y=1$ の整数解を１つ求めよ。

解答　係数の倍数を書き出して，差が1の数を探す。

$33x$ ： 33,66,99,132,…

$7y$ ： 7, 14,21,28,35,42,49,56,63,70,77,84,91,98,…

例えば$99=33\times3$, $-98=7\times(-14)$　より　$x=3$, $y=-14$ 答

別解　$33x+7y=1$　　$(7\times4+5)x+7y=1$　　$5x+7(4x+y)=1$

$5x+7y'=1$　例えば　$x=3$ ， $y'=-2$ のとき $5x+7y'=1$

$y'=4x+y=12+y=-2$ より　$y=-14$

よって　$(x,y)=(3\,,\,-14)$ 答

別解　$\dfrac{33}{7}=4+\dfrac{5}{7}=4+\dfrac{1}{\frac{7}{5}}=4+\dfrac{1}{1+\frac{2}{5}}=4+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$

一番最後の $\dfrac{1}{2}$ を除いた分数は　$4+\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}}=4+\dfrac{2}{3}=\dfrac{14}{3}$

分母の３から $x=3$，分子の14から$y=3-14$ を取り

$x=3$ ， $y=-14$ 答

3　$43x-30y=1$ の整数解をすべて求めよ。（一般解を求めよ。）

$\dfrac{43}{30}=1+\dfrac{13}{30}=1+\dfrac{1}{\frac{30}{13}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{13}{4}}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}}$

$1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{3}}=1+\dfrac{3}{7}=\dfrac{10}{7}$

$(30\cdot1+13)x-30y=1$

$13x+30(x-y)=1$

$x-y=a$ とすれば　$13x+30a=1$

$13x+(13\times2+4)a=1$　　$13(x+2a)+4a=1$

$13\times1+4\times(-3)=1$ より

$a=-3$ ，　　$x=7$ ， $y=10$　（特殊解）

つぎに

$$\begin{array}{rr} & 43x-30y=1 \\ -) & 43\times7-30\times10=1 \\ \hline & 43(x-7)-30(y-10)=0 \end{array}$$

$x-7$ は30の倍数，$y-10$ は43の倍数であることから，

$43\times30k-30\times43k=0$ とすれば，

$\begin{cases}x-7=30k\\y-10=43k\end{cases}$ より　一般解は　$\begin{cases}x=7+30k\\y=10+43k\end{cases}$ 答

4　$5x+13y=7$ の一般解を求めよ。

(1)　まず　$5x'+13y'=1$ として特殊解を求めよ。

解答　係数の倍数を書き出して，差が1の数を探す。

$5x$ ： 5 , 10 , 15 , 20 , 25 , …

$13y$ ： 13 , 26 , …

例えば $-25=5\times(-5)$, $26=13\times2$ より $x'=-5$ ， $y'=2$

よって　$5\times(-5)+13\times2=1$　の両辺を７倍すると

$5\times(-35)+13\times17=7$　より　$(x\,,\,y)=(-35\,,\,14)$

(2)　一般解を求めよ。

$$\begin{array}{rr} & 5x+13y=7 \\ -) & 5\times(-35)+13\times14=7 \\ \hline & 5(x+35)+13(y-14)=0 \end{array}$$

$x+35$ は13の倍数，$y-14$ は５の倍数であることから，

$5\times13k+13\times(-5k)=0$ とすれば，

$\begin{cases}x+35=13k\\y-14=-5k\end{cases}$ より　一般解は　$\begin{cases}x=-35+13k\\y=14-5k\end{cases}$ 答

5　$157x-68y=3$ の整数解をすべて求めよ。　【早稲田大･理工1994】

$157x'-68y'=1$ とする。①

$\dfrac{157}{68}=2+\dfrac{21}{68}=2+\dfrac{1}{\frac{68}{21}}=2+\dfrac{1}{3+\frac{5}{21}}=2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{\frac{21}{5}}}=2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{5}}}$

$2+\dfrac{1}{3+\frac{1}{4}}=2+\dfrac{4}{13}=\dfrac{30}{13}$　より　$157\times13-68\times30=1$　とできる。②

②の両辺３倍　$157\times13\times3-68\times30\times3=3$　③

与式−③より　$157(x-39)-68(y-90)=0$　だから$157\times68k-68\times157k=0$ として，

$\begin{cases}x-39=68k\\y-90=157k\end{cases}$ より　$\begin{cases}x=39+68k\\y=90+157k\end{cases}$ 答

6　参考　$7x+5y=1$ の特殊解 $x=-2$ ， $y=3$ と変形の意味。

$$\begin{array}{rr} & 7x+5y=1 \\ -) & 7\times(-2)+5\times3=1 \\ \hline & 7(x+2)+5(y-3)=0 \end{array}$$

$7x'+5y'=0$

$y=-\dfrac{7}{5}x+\dfrac{1}{5}$ を

x 軸方向へ２, y 軸方向へ -3

平行移動すると

$y'=-\dfrac{7}{5}x$ となり，原点を通る。

参考　数＝整数部分＋小数部分　であるから

小数部分＝数−整数部分

となる。

$\sqrt{2}\fallingdotseq1.4\cdots=1+0.4\cdots$

$\sqrt{2}$ の整数部分＝1，

小数部分＝$\sqrt{2}-1$

$\sqrt{2}=1+(\sqrt{2}-1)$

$=1+\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}$

$\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\times\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$=\sqrt{2}+1$

$=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\dfrac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$

$=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}-1}}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$

$\sqrt{2}+1$ を$\dfrac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}$で置き換える。

$=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}}}$

$=1+\dfrac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdots}}}}}$　　【$\sqrt{2}$ の連分数展開】

と，２が無限に続く連分数となる。